АНАЛИЗ СТАТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ, СНАБЖЕННОЙ АВТОМАТИЧЕСКИМИ РЕГУЛЯТОРАМИ ВОЗБУЖДЕНИЯ, С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА В КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЕ

Толибжанов Мухаммаджон Маликжон угли
Ташкентский государственный
технический университет, г. Ташкент

Исследование устойчивости ЭЭС при малых возмущениях базируется на известных классических положениях общей теории устойчивости движения.

Проверка статической устойчивости энергосистем заключается в определении возможности существования устойчивого режима при заданных значениях параметров энергосистемы (определяемых составом работающего оборудования и электрической сети), режиме генерирующих источников, нагрузках узловых точек и настройке автоматических устройств регулирования режима.

Рассмотрим линейную стационарную систему

$$\frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dt}} = \mathbf{AX}, \qquad (1)$$

где **A** - квадратная матрица с постоянными элементами ; **X** -n - мерный вектор – столбец с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Следуя Ляпунову определим для этой системы функцию V в квадратичной форме:

$$\mathbf{V}= \sum_{\mathbf{i,j=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{q_{ij} x_i x_j} = \mathbf{X^T QX}, \quad \text{i, j= 1, 2, ... , n;} \qquad (2)$$

здесь **Q** - пока неизвестная квадратная матрица коэффициентов квадратичной формы; X' - транспонированный X (вектор-строка).

Выше было показано, что полная производная от V по времени в силу (2) будет:

$$\frac{dV}{dt} = \mathbf{X^T\ (A^TQ+QA)\ X.} \qquad (3)$$

Необходимо, чтобы V удовлетворяла условию:

$$\frac{dV}{dt} = -\ \mathbf{W}, \qquad (4)$$

где **W**- произвольно задаваемая квадратичная форма переменных состояния.

Обозначим как и ранее:

$$\mathbf{A^TQ+\ QA=\ -\ C}. \qquad (5)$$

Уравнение (5) ставит в соответствие всякой симметричной матрице **Q** матрицу **C** и наоборот, причем это соответствие линейно. Элементы матрицы **Q** определяются из (5) решением $\frac{n(n+1)}{2}$ уравнений, где n - число уравнений. Если задаться положительно определенной симметричной матрицей **C** (при этом найденная из (5) матрица **Q** окажется также положительно определенной), то ввиду линейности и стационарности системы (1) получим согласно теореме Ляпунова асимптотическую устойчивость ее положения равновесия. При этом условия устойчивости должны быть строго эквивалентными полученным из критериев Рауса – Гурвица.

Исследуем статическую устойчивость простейшей нерегулируемой (E_{qi}= const) системы «генератор – линия – шины» при U_c = const с учетом переходных процессов в обмотке возбуждения. После разложения правой части уравнения движения ротора синхронной машины в ряд Тейлора в окрестности точки δ_0 получим:

$$T_j \frac{d^2(\delta)}{dt^2} + P_d \frac{d(\Delta\delta)}{dt} = -\frac{\partial P_{E_q}}{\partial \delta}\Delta\delta - \frac{\partial P_{E_q}}{\partial E_q}\Delta E_q. \tag{6}$$

Уравнение переходного процесса в обмотке ротора имеет вид:

$$T_{d_0}\frac{dE_q}{dt} = E_{q_e} - E_q. \tag{7}$$

Учитывая, что

$$E'_q = E_q \frac{X'_{d\Sigma}}{X_{d_\Sigma}} + U_c \frac{X_d - X'_d}{X_{d\Sigma}}\cos\delta \tag{8}$$

имеем

$$T_{d_0}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E'_q}{\partial E_q}\Delta E_q + \frac{\partial E'_q}{\partial \delta}\Delta\delta\right) = -\Delta E_q. \tag{9}$$

Совместное решение (6)-(9) приводит к характеристическому уравнению:

$$a_0 p^3 + a_1 + a_2 p + a_3 = 0, \tag{10}$$

где a_0, a_1, a_2, a_3 - коэффициенты характеристического уравнения, E_{q_e} - э.д.с. машины, изменяющийся под действием регулятора или возмущения, X'_d - переходное индуктивное сопротивление, E'_q - переходная э.д.с., δ - угол нагрузки генератора устойчивости. Остальные обозначения общепринятые.

Функцию Ляпунова построим следующим образом.

Уравнения ЭЭС (6)-(9) приведем к уравнениям переменных состояния.

Обозначив:

$$\Delta\delta = x_1, \quad \frac{d(\Delta\delta)}{dt} = \frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \Delta E_q = x_3,$$

из (6)-(9) получим

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ \frac{dx_3}{dt} &= a_{31}x_1 + a_{33}x_3, \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$P_{E_q} = \frac{E_q^2}{z_{11}}\sin\alpha_{11} + \frac{E_q U}{z_{11}}\sin(\delta - \alpha_{11}), \quad \text{при } r = 0, \quad P_{E_q} = \frac{E_q U_c}{X_{d\Sigma}}\sin\delta,$$

$$E'_q = E_q \frac{X'_{d\Sigma}}{X_{d\Sigma}} + U_c \frac{(X_d - X'_d)}{X_{d\Sigma}}\cos\delta, \quad X_{d_\Sigma} = X_d + X_{сети}, \quad X'_{d_\Sigma} = X'_d + X_{сети},$$

$$\frac{\partial E'_q}{\partial E_q} = \frac{X'_{d\Sigma}}{X_{d\Sigma}}, \quad c_1 = \frac{\partial P_{E_q}}{\partial \delta} = \frac{E_q U_c}{X_{d\Sigma}}\cos\delta, \quad b_1 = \frac{\partial P_{E_q}}{\partial E_q} = \frac{U_c}{X_{d\Sigma}}\sin\delta,$$

$$a_{21} = -\frac{c_1}{T_j}, \quad a_{22} = -\frac{P_d}{T_j}, \quad a_{23} = -\frac{b_1}{T_j}, \quad a_{31} = \frac{\partial E'_q}{\partial \delta} = \frac{U_c}{T_{d0}}\frac{X_d - X'_d}{X_{d2}}\sin\delta,$$

$$a_{33} = -\frac{1}{T_{d_0}}\frac{X_{d_\Sigma}}{X'_{d_\Sigma}}.$$

Матрица коэффициентов системы (1):

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{23} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{0} & \mathbf{a}_{33} \end{bmatrix}. \qquad (12)$$

Функция Ляпунова в нашем случае при n = 3 согласно (2) имеет вид:

$$\mathbf{V} = \mathbf{X^TQ\,X} = \mathbf{q}_{11}\mathbf{x}_1^2 + \mathbf{q}_{22}\mathbf{x}_2^2 + \mathbf{q}_{33}\mathbf{x}_3^2 + 2\mathbf{q}_{12}\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 + 2\mathbf{q}_{13}\mathbf{x}_1\mathbf{x}_3 + 2\mathbf{q}_{23}\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3. \qquad (13)$$

Можно формировать **W** на основе (11) в соответствии с (3) – (5) . Зададимся **C** в виде единичной матрицы. Тогда

$$\mathbf{W} = \mathbf{x}_1^2 + \mathbf{x}_2^2 + \mathbf{x}_3^2. \qquad (14)$$

Приравнивая коэффициенты x_i^2 и x_{ij} (i, j=1, 2, 3) в выражениях для **V и W**, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} &\mathbf{a}_{21}\mathbf{q}_{12} = -1 \\ &\mathbf{q}_{11} + \mathbf{a}_{22}\mathbf{q}_{12} + \mathbf{a}_{32}\mathbf{q}_{13} + \mathbf{a}_{21}\mathbf{q}_{22} = 0 \\ &\mathbf{a}_{23}\mathbf{q}_{12} + \mathbf{a}_{33}\mathbf{q}_{13} + \mathbf{a}_{21}\mathbf{q}_{23} = 0 \\ &\mathbf{q}_{12} + \mathbf{a}_{22}\mathbf{q}_{22} + \mathbf{a}_{32}\mathbf{q}_{23} = -1 \\ &\mathbf{q}_{13} + \mathbf{a}_{23}\mathbf{q}_{22} + (\mathbf{a}_{22} + \mathbf{a}_{33})\,\mathbf{q}_{23} + \mathbf{a}_{32}\mathbf{q}_{33} = 0 \\ &\mathbf{a}_{23}\mathbf{q}_{23} + \mathbf{a}_{33}\mathbf{q}_{33} = -1 \end{aligned} \qquad (15)$$

откуда и определяем $\mathbf{q}_{ij}(\mathbf{i},\mathbf{j} = 1, 2, 3)$:

$$q_{11} = \frac{(a_{22}+a_{33})[a_{21}a_{32}^2(2a_{21}-1)+(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})^2]-a_{33}a_{21}[(a_{22}^2+a_{32}a_{23})-a_{21}]}{a_{21}a_{33}[(a_{22}+a_{33})(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{21}a_{22}]} = -\frac{z_0}{a_{21}a_{32}z_1},$$

$$q_{12} = -\frac{1}{a_{21}},$$

$$q_{13} = -\frac{[(a_{22}+a_{33})(a_{23}a_{22}-a_{13}a_{32})a_{23}-a_{21}^2(a_{22}a_{32}+a_{33}a_{23})+a_{21}a_{23}a_{33}]}{a_{21}a_{33}z_1},$$

$$q_{22} = \frac{(1-a_{21})[a_{33}(a_{22}+a_{33})-a_{21}]-a_{21}-a_{32}(a_{32}-a_{23})}{a_{21}z_1},$$

$$q_{23} = \frac{a_{21}(a_{23}a_{33}-a_{22}a_{32})-a_{23}(a_{22}+a_{33})}{a_{33}a_{21}z_1},$$

$$q_{33} = \frac{(a_{22}+a_{33})(a_{23}^2-a_{21}a_{22}a_{33})-a_{33}a_{21}a_{23}(a_{23}-a_{32})+a_{22}a_{21}^2}{a_{21}a_{33}z_1},$$

где $\mathbf{Z_0 = (a_{22} + a_{33})[a_{21}a^2_{32}(2a_{21}-1) + (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})^2] - a_{33}a_{21}[(a^2_{22} + a_{32}a_{23}) - a_{21}]}$, $\mathbf{Z_1 = (a_{22} + a_{33})(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}a_{22}}$.

Таким образом, матрица коэффициентов квадратичной формы (13) согласно (2) имеет вид:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{11} & \mathbf{q}_{12} & \mathbf{q}_{13} \\ \mathbf{q}_{21} & \mathbf{q}_{22} & \mathbf{q}_{23} \\ \mathbf{q}_{31} & \mathbf{q}_{32} & \mathbf{q}_{33} \end{bmatrix}. \qquad (16)$$

Мы задались определенно отрицательной производной **W** (положительно определенной симметричной **C**). Если при этом условия положительной определенности матрицы **Q** квадратичной формы (13) будут удовлетворены, то, очевидно, условия асимптотической устойчивости положения равновесия системы (11) также будут обеспечены.

Для положительной определенности квадратичной формы (13) согласно критерию Сильвестра необходимо и достаточно, чтобы главные диагональные миноры матрицы **Q** были положительными:

$$\triangle_{\text{л}1} = \mathbf{q}_{11} > 0, \quad \triangle_{\text{л}2} = \begin{vmatrix} \mathbf{q}_{11} & \mathbf{q}_{12} \\ \mathbf{q}_{21} & \mathbf{q}_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \triangle_{\text{л}3} = \begin{vmatrix} \mathbf{q}_{11} & \mathbf{q}_{12} & \mathbf{q}_{13} \\ \mathbf{q}_{21} & \mathbf{q}_{22} & \mathbf{q}_{23} \\ \mathbf{q}_{31} & \mathbf{q}_{32} & \mathbf{q}_{33} \end{vmatrix} > 0. \qquad (17)$$