TOPOLOGIK FAZOLAR

Ibragimov Z. Z.- “ICHJA va B” kafedrasi
Mamatov J. X. - Oliy matematika kafedrasi
Jizzax politexnika instituti

Annotatsiya: Ushbu ilmiy maqolada matematikaning eng muhim tushunchalaridan biri bo’lgan topologik fazolarga ta’rif berilgan va ularning zichligi va uning turli topologik xossalariga oid teoremalar isbotlab ko‘rsatilgan.

Kalit so’zlar: topologik fazo, o’chiq to’plam, yopiq to’plam, zich to’plam, kozich to’plam, bo’sh to’plam, qism to’plam

Topologik fazolar va ularning zichligi

1. Ta’rif. Topologik fazo deb X to‘plam va shu to‘plamning quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi τ qism to‘plamlar oilasidan iborat (X, τ)juftlikka aytiladi.

(O1) □ $\in \tau$ va $X \in \tau$;

(O1) Agar $U_1 \in \tau$ va $U_2 \in \tau$ bo‘lsa, u holda $U_1 \cap U_2 \in \tau$bo‘ladi;

(O3) Agar $A \subset \tau$ bo‘lsa, u holda $\cup A \in \tau$ bo‘ladi;

Bunda X to‘plam fazo deb, uning elementlari esa fazoning nuqtalari deb ataladi; X to‘plamning τ oilaga tegishli elementlari X fazoning ochiq to‘plamlari, τ oilaning o‘zi esa X dagi topologiya deb ataladi.

Ochiq to‘plamlar oilasining (O1) - (O3) xossalarini quyidagi ko‘rinishda ham keltirish mumkin:

(O1’) Bo‘sh to‘plam va butun fazo ochiq to‘plamlardir;

(O2’) Ikkita ochiq to‘plamning kesishmasi yana ochiq to‘plamdir;

(O3’) Ixtiyoriy sondagi ochiq to‘plamlar birlashmasi yana ochiq to‘plamdir;

(O2’) dan ixtiyoriy chekli sondagi ochiq to‘plamlar kesishmasi yana ochiq to‘plam ekanligi kelib chiqadi.

Biror $x \in X$ nuqta va biror $U \subset X$ ochiq to‘plam $x \in U$ bo‘lsa, u holda U to‘plam x nuqtaning atrofi deyiladi.

2. Misol. $X=\{a, b\}$ - ikkita elementdan iborat to‘plam berilgan bo‘lsin. Bu to‘plamda bir qancha usullar bilan topologiya kiritish mumkin:

a) $\tau_1=\{\varnothing, X\}$, b) $\tau_2=\{\varnothing, \{a\}, X\}$, c) $\tau_3=\{\varnothing, \{b\}, X\}$, d) $\tau_4=\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, X\}$.

$(X, \tau_i), i=1, 2, 3, 4$ topologik fazo ekanligini tekshirish mumkin.

3. Misol. Zarisskiy topologiyasi. Ixtiyoriy X – cheksiz to‘plam va bu to‘plamning to‘ldirmasi $X \backslash U$ chekli bo‘ladigan barcha U qism to‘plamlaridan hamda bo‘sh to‘plamdan iborat τ oilani qaraymiz. Osongina tekshirish mumkinki, τ oila X da topologiya tashkil qiladi. Bu topologiyaga Zarisskiy topologiyasi deyiladi.

4.Tasdiq. Agar V to‘plamning ixtiyoriy nuqtasi shu to‘plamga tegishli biror U_x atrofga ega bo‘lsa va faqat shu holda V to‘plam ochiq to‘plam bo‘ladi.

Haqiqatan, V – ochiq to‘plam bo‘lsin. Ixtiyoriy $x \in V$ nuqta $U_x=V$ uchun deb olamiz. Aksincha, ixtiyoriy $x \in V$ nuqta uchun V ga tegishli bo‘lgan U_x atrof mavjud bo‘lsin. (O3) shartga ko‘ra tasdiq isbotlandi. $V=$□$\{U_x : x \in V\}$ - ochiq to‘plam topilib, $x \in U_\alpha \subset V$o‘rinli bo‘ladi.

Yetarliligi. Bizga V – bo‘sh bo‘lmagan ochiq to‘plam (X, τ) topologik fazoda berilgan bo‘lsin. Shartga ko‘ra ixtiyoriy $x \in V$ nuqta uchun shunday $U_x \in B$ ochiq to‘plam topilib, $x \in U_x \subset V$ shart o‘rinli bo‘ladi. Agar x nuqtani topologik fazoning ixtiyoriy ochiq to‘plamini V ochiq to‘plam bo‘yicha siljitib chiqsak, u holda $\{U_x : x \in V, U_x \in B\}$ bo‘ladi.

5. Ta’rif: (X, τ) topologik fazoning $B \subset \tau$ oilaga tegishli to‘plamlarning birlashmasi ko‘rinishida ifodalash mumkin bo‘lsa, B oilaga X fazoning bazasi deyiladi.

6. Tasdiq: $(X,\ \tau)$ topologik fazoning ochiq qism to‘plamlaridan iborat B oila shu fazoning bazasi bo‘lishi uchun ixtiyoriy $x \in X$ nuqta va bu nuqtaning ixtiyoriy V atrofi uchun $U_\alpha \in$□ to‘plam mavjud bo‘lib, $x \in U_\alpha \subset V$ shartning bajarilishi zarur va yetarli.

7.Isbot. Zarurligi: Ixtiyoriy x nuqta va V uning ixtiyoriy atrofi berilgan bo‘lsin. B oila $(X,\ \tau)$ topologik fazoning bazasi bo‘lganligi uchun shunday ochiq to‘plamlar $\{U_\alpha : \alpha \in B_0 \subset B\}$ mavjudki, bu ochiq to‘plamlar uchun □ $\{U_\alpha : \alpha \in B_0\} = V$ shart bajariladi. U holda shunday $U_\alpha \in B$ oila V to‘plamni qoplaydi, ya’ni □ $\{U_x : x \in V,\ U_x \in$□$\} = V$ bo‘ladi. Demak, B oila $(X,\ \tau)$ topologik fazoda baza tashkil qilar ekan. 6. tasdiq isbotlandi.

Ma’lumki, har qanday topologik fazo ko‘pgina fazolarga ega bo‘lishi mumkin. Ixtiyoriy baza quyidagi xossalarga ega:

(B1) Har qanday $U_1,\ U_2 \in B$ to‘plamlar va ixtiyoriy $x \in U_1 \cap U_2$ nuqta uchun shunday $U_\alpha \in B$ element topilib, $x \in U_\alpha \subset U_1 \cap U_2$ o‘rinli bo‘ladi.

(B2) Ixtiyoriy $x \in X$ uchun shunday $U_\alpha \in B$ element topilib, $x \in U_\alpha$ o‘rinli bo‘ladi.

Isboti. (B1) ning isboti. Ixtiyoriy $U_1,\ U_2 \in B$ to‘plamlar va ixtiyoriy $x \in U_1 \cap U_2$ nuqta berilgan bo‘lsin. U holda, (O2) shartga ko‘ra $U_1 \cap U_2$ – ochiq to‘plam bo‘ladi. Bazaning xossasiga ko‘ra shunday ochiq to‘plamlar $\{U_\alpha:\ \alpha \in B\}$ oilasi mavjudki, bu uchun $U_1 \cap U_2 =$□$\{U_\alpha:\ \alpha \in B\}$o‘rinli bo‘ladi. U holda shunday $U_\alpha \in B$ ochiq to‘plam mavjudki, bu uchun $x \in U_\alpha \subset U_1 \cap U_2$ shart bajariladi.

(B2) ning isboti. (O1) shartga ko‘ra X – ochiq to‘plam bo‘ladi, u holda har bir $x \in X$ nuqta uchun shunday $U_\alpha \in B$ element topilib, $x \in U_\alpha \subset X$ shart bajarilsa.

8. Ta’rif. Agar $[A]=X$ shart bajarilsa, $A \subset X$ to‘plam (X,τ) topologik fazoda hamma joyda zich deyiladi.

9. Tasdiq. $A \subset X$ to‘plam (X,τ) topologik fazoning hamma joyida zich bo‘lishi uchun (X,τ) topologik fazodagi ixtiyoriy bo‘sh bo‘lmagan ochiq G to‘plam A to‘plamning qandaydir nuqtasini o‘z ichiga olishi zarur va yetarlidir.

Isboti. Zarurligi. $A \subset X$ to‘plam (X,τ) topologik fazoning hamma joyida zich bo‘lsin va G – ochiq bo‘lmagan to‘plam berilgan bo‘lsin. U holda shunday $x \in G$ nuqta topiladi. A to‘plam (X,τ) topologik fazoning hamma joyida zichligidan, $G \cap A \neq \varnothing$ kelib chiqadi. Demak, shunday $\alpha \in A$ element topilib, $\alpha \in G \cap A$ bo‘ladi.

Yetarliligi. (X,τ) topologik fazodagi ixtiyoriy bo‘sh bo‘lmgan ochiq G to‘plam A to‘plamning qandaydir nuqtasini o‘z ichiga olsin. U holda $[A]=X$ bo‘ladi. 9. tasdiq isbotlandi.

Masalalar. 1) Barcha ratsional sonlar to‘plami R – to‘g’ri chiziqda hamma joyda zich to‘plam bo‘ladi, ya’ni $[Q]=R$.

2) Barcha irratsional sonlar to‘plami R – to‘g’ri chiziqda hamma joyda zich to‘plam bo‘ladi, ya’ni $[I]=R$.

3) $N=\{1,\ 2,\ \dots,\ n, \dots\}$ - barcha natural sonlar to‘plami berilgan bo‘lsin. Bu to‘plamda N dan farqli hech qanday hamma joyda zich qism to‘plam mavjud emas, ya’ni $N=[N]$.

4) $Z=\{\dots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \dots\}$ - barcha butun sonlar to‘plami berilgan bo‘lsin. Bu to‘plamda Z dan farqli hech qanday hamma joyda zich qism to‘plam mavjud emas, ya’ni $Z=[Z]$.

10.Ta’rif.$A \subset X$ to‘plam (X,τ) topologik fazoda kozich deyiladi, agar $[X \backslash A]=$X bo‘lsa.

11.Tasdiq.$A \subset X$ to‘plam (X,τ) topologik fazoda kozich bo‘lishi uchun (X,τ) topologik fazodagi ixtiyoriy bo‘sh bo‘lmagan ochiq to‘plam $X \backslash A$ to‘plamning qandaydir nuqtasini o‘z ichiga olishi zarur va yetarlidir.

Isboti. Zarurligi. $A \subset X$ to‘plam (X,τ) topologik fazoda kozich bo‘lsin. Bo‘sh bo‘lmagan ixtiyoriy ochiq $G \subset X$ to‘plamni olaylik. U holda $G \cap (X \backslash A) \neq \varnothing$ bo‘ladi, bundan $X \backslash A$ to‘plamning zich ekanligi kelib chiqadi. Bu esa $X \backslash A$ to‘plamning qandaydir nuqtasini o‘z ichiga olishini bildiradi.

Yetarliligi. Bo‘sh bo‘lmagan ixtiyoriy ochiq $G \subset X$ to‘plam berilgan bo‘lsin. Shartga ko‘ra bu to‘plam $X \backslash A$ to‘plamning qandaydir nuqtasini o‘z ichiga oladi. Bundan $X \backslash A$ to‘plamning (X,τ) topologik fazoda zichligini bildiradi. Demak, $[X \backslash A]=X$ ekan. 11. Tasdiq isbotlandi.

Masalalar. 1) Barcha ratsional sonlar to'plami R – to'g'ri chiziqda kozich bo'ladi, ya'ni $[R\backslash Q]=R$.

2) Barcha irratsional sonlar to'plami R – to'g'ri chiziqda kozich bo'ladi, ya'ni $[R\backslash I]=R$.

3) $N=\{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ - barcha natural sonlar to'plami R – to'g'ri chiziqda kozich bo'ladi, ya'ni $M=(-\infty;\ 1)$□$(1;\ 2)$□$(2;\ 3)$□□□□□$(n-1;\ n)$□$(n;\ n+1)$□□□. to'plam to'g'ri chiziqda zichdir.

4) $Z=\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ - barcha butun sonlar to'plami to'g'ri chiziqda kozich, ya'ni $M=\{\ldots, (-2; -1)$□$(-1; 0)$□$(0; 1)$□□□□$\}$ - to'plam to'g'ri chiziqda zichdir.

12. Ta'rif. Agar $[A]$ to'plam (X,τ) topologik fazoda kozich bo'lsa, ya'ni $[X\backslash[A]]=X$ shart bajarilsa, $A\subset X$ to'plam (X,τ) topologik fazoda hech qayerda zich emas deyiladi.

13. Tasdiq. $A\subset X$ to'plam (X,τ) topologik fazoda hech qayerda zich emas bo'lishi uchun (X,τ) topologik fazodagi ixtiyoriy bo'sh bo'lmagan ochiq to'plam shunday bo'sh bo'lmagan ochiq to'plam ostiga ega bo'lib, u A to'plam bilan kesishmasi bo'sh bo'lishi zarur va yetarli.

Isboti. Zarurligi. $A\subset X$ to'plam (X,τ) topologik fazoda hech qayerda zich bo'lmasin va bo'sh bo'lmagan ixtiyoriy G ochiq to'plam (X,τ) topologik fazoda berilsin. Shartga ko'ra, A to'plam hech qayerda zich bo'lmaganligidan $X\backslash[A]$ to'plam X da zich bo'ladi. Shuning uchun kesishma $G\cap(X\backslash[A])\neq\emptyset$ bo'sh emas. Ixtiyoriy $x\in G\cap(X\backslash[A])\neq\emptyset$ nuqtani olaylik, u holda x nuqtaning shunday O_x atrofi topilib, $O_x\subset G\cap(X\backslash[A])\neq\emptyset$ bo'ladi. Bundan $O_x\cap A=\emptyset$ ekanligi kelib chiqadi.

Yetarliligi. (X,τ) topologik fazodagi ixtiyoriy bo'sh bo'lmagan ochiq to'plam shunday bo'sh bo'lmagan ochiq qism to'plamga ega bo'lib, u A to'plam bilan kesishmasin. $A\subset X$ to'plamning hech qayerda zich emasligini ko'rsatamiz. Buning uchun $X\backslash[A]$ to'plamning (X,τ) topologik fazoda zichligini ko'rsatamiz. (X,τ) topologik fazoda bo'sh bo'lmagan ixtiyoriy G ochiq to'plamni qaraylik. U holda bo'sh bo'lmagan shunday $G_1\cap(X\backslash[A])\neq\emptyset$ topilib, $G_1\cap A=\emptyset$ shart bajariladi. Bundan ko'rinadiki, $[A]$ to'plam kozich ekan. 13.tasdiq isbotlandi.

Misollar.1) $N=\{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ - barcha natural sonlar to'plami to'g'ri chiziqda hech qayerda zich emas. Haqiqatan ham, $[N]=N$ *va* $[R\backslash[N]]=R$.

2) $Z=\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2\ldots\}$ - barcha butun sonlar to'plami to'g'ri chiziqda hech qayerda zich emas. Haqiqatan ham, $[Z]=Z$ *va* $[R\backslash[Z]]=R$.

14.Ta'rif. Agar $A\subset A^d$ shart bajarilsa, $A\subset X$ to'plam o'zida zich deyiladi.

15. Tasdiq. Agar A to'plam (X,τ) topologik fazoda zich bo'lsa, u holda ixtiyoriy ochiq $U\subset X$ to'plam uchun $[U]=[U\cap A]$ munosabat o'rinli.

Isbot. a). Ixtiyoriy $x\in[U]$ nuqta va uning ixtiyoriy O_x atrofi uchun $O_x\cap U\neq\emptyset$ o'rinli. A top'lam (X,τ) topologik fazoda zich bo'lganligi uchun $(O_x\cap U)\cap A\neq\emptyset$ shart bajariladi. $(O_x\cap U)\cap A\neq\emptyset$ ekanligidan o'z navbatida $x\in[U\cap A]$ bo'lishi o'rinli bo'ladi.

b). A to'plam (X,τ) topologik fazoda zich bo'lsin va $U\subset X$ – ixtiyoriy ochiq to'plamni olaylik. Ixtiyoriy $y\in[U\cap A]$ - nuqta va uning ixtiyoriy O_y atrofi uchun $O_y\cap[U\cap A]\neq\emptyset$ o'rinli. Bundan $y\in[U]$ ekanligi kelib chiqadi. 15. tasdiq isbotlandi.

16. Ta'rif. Hamma joyda zich bo'lgan A qism to'plamlarining eng kichik kardinal soniga (X,τ) topologik fazoning zichligi deyiladi va u quyidagicha belgilnadi:

$$d(X)=\min\{|A| : [A]=X\}$$

17. Teorema. Ixtiyoriy (X,τ) topologik fazo uchun quyidagi tengsizlik o'rinli:

$$d(X)\leq w(X)$$

Isboti. $B=\{U_\alpha: \alpha\in A\}$ - oila (X,τ) topologik fazoning bazasi bo'lib $|A|=\tau$ bo'lsin. Ixtiyoriy $\alpha\in A$ uchun qandaydir $x_\alpha\in U_\alpha$ nuqtani tanlab olamiz. Barcha tanlangan nuqtalarni $M=\{x_\alpha: \alpha\in A\}$ bilan belgilaymiz. Ravshanki, $|M|\leq\tau$ bo'ladi. M – to'plamning (X,τ) topologik fazoda zichligini ko'rsatamiz. (X,τ) topologik fazoning ixtiyoriy x nuqtasini va uning ixtiyoriy O_x atrofini qaraylik. B – oila (X,τ) topologik fazoning bazasi bo'lganligidan, shunday $U\in B$ to'plam topilib, $x\in U_\alpha\subset O_x$ shart o'rinli bo'ladi. Tanlashga ko'ra $x_\alpha\in U_\alpha$, bundan $O_x\cap M\neq\emptyset$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, $d(X)\leq w(X)$ tengsizlik o'rinli ekan. Teorema isbotlandi.

Adabiyotlar:

[1] A.V. Arhangel’skii: *On one class of spaces containing all metric and all locallycompact spaces*, Matem. Sbornik67:1(1965), 55–85.

[2] R.B. Beshimov: *On some properties of weakly separable spaces*, Uzbek. Math. Journ. 1 (1994), 7–11 (in Russian).

[3] R.B. Beshimov: *A weakly separable space and separability*, Doklady Uzbek. Akad. Nauk 3 (1994), 10–12 (in Russian).

[4] Mamatov J. (2023). KUCHSIZ SEPARABEL FAZOLARNING TOPOLOGIK XOSSALARI. Евразийский журнал математической теории и компьютерных наук, 3(2), 7–14. Извлечено от https://in-academy.uz/index.php/EJMTCS/article/view/9802

[5] Ахадова, К. С. "О ГРУППЕ ИЗОМЕТРИЙ СЛОЕНОГО МНОГООБРАЗИЯ." Естественные и технические науки (2014): 14-17.

[6] Ахадова, К. С. "Изометрические отображения слоеных многообразий."